www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1989

MATHEMATIQUES I

P'

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.

On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante :

pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$ et telles, de plus, que l'on ait : $U_0 \geq 0$ et $U_1 \geq 0$.

On associe à tout élément (x, y) de Q la suite U(x, y) appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.

Le terme de rang n de U(x, y) sera noté $U_n(x,y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.

Enfin, λ désignant un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x,y) de Q tels que la suite U(x,y) ait pour limite λ.

La partie IV ne dépend que de la partie I.

Première partie :

Généralités

I.1.a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?

c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.

d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.

e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?

I.2. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ appartenant à S et *non constante*.

a) Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

b) Montrer que, s'il existe $N \geq 1$ tel que U_{N+1} soit supérieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

On établirait de même que, s'il existe $N \geq 1$ tel que U_{N+1} soit inférieur ou égal à U_{N-1} et à U_N, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang. La démonstration correspondante n'est pas demandée.

c) Déterminer les limites des suites U(x, y) pour $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ et pour $x = 2$, $y = 0$.

I.3. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante, appartenant à S ; on suppose de plus que, quel que soit N, la suite $(U_n)_{n\geq N}$ n'est ni strictement croissante, ni strictement décroissante. *On ne cherchera pas, dans cette question, à montrer l'existence de telles suites.*

Montrer que les deux suites $(U_{2n})_{n\geq 0}$ et $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont strictement monotones et de sens contraire. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1. On pourra montrer que U_0 et U_1 sont distincts et envisager les deux cas $U_0 < U_1$ et $U_0 > U_1$.

I.4. Etablir, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *non constante* appartenant à S, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) Il existe un entier $N \geq 0$ tel que $U_N \geq 1$ et $U_{N+1} \geq 1$.

b) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

c) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

On pourra, pour cela, établir que, si une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifie la propriété **a)**, tous ses termes sont, à partir d'un certain rang, strictement supérieurs à 1.

I.5. Etablir de même, pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de S *non constante*, l'équivalence des propriétés suivantes :

a) Il existe un entier $N \geq 0$ tel que U_N et U_{N+1} soient inférieurs au sens large à 1.

b) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

c) La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ tend vers zéro.

I.6. Montrer que E_0, E_1, $E_{+\infty}$ sont non vides. Quelle est leur réunion ?

Tourner la page .../...

Deuxième partie *Dans cette partie, on montre que E_1 a au moins deux éléments.*

Pour $(x,y) \in Q$, on désigne par $\lambda(x,y)$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de $U(x, y)$.

1. Comparer $\lambda(x,y)$ et $\lambda(x', y')$ dans l'hypothèse où (x, y) et (x', y') vérifient : $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

2. On considère deux couples (x, y) et (x', y') éléments de Q. On suppose de plus que $U(x, y)$ converge vers 1.

a) Montrer que, si l'on a pour un entier N : $U_{N-1}(x, y) + \varepsilon \leq U_{N-1}(x', y')$ et $U_N(x, y) + \varepsilon \leq U_N(x', y')$, alors, pour tout $n \geq N$ on a : $U_n(x, y) + \varepsilon \leq U_n(x', y')$.

b) Donner la valeur de $\lambda(x', y')$ dans les deux cas suivants :

. $x \leq x'$, $y \leq y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.

. $x \geq x'$, $y \geq y'$ et $(x, y) \neq (x', y')$.

3.a) Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ borne supérieure de l'ensemble $x \geq 0$ tels que $\lambda(x, 0)$ soit nul.

b) Que dire de $\lambda(x, 0)$ pour $0 \leq x < a$?

c) Déterminer la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut de a. On justifiera la méthode employée.

4. a) Montrer que, pour tout n, la fonction $x \longmapsto U_n(x,0)$ est continue.

b) Montrer que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers zéro, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a + \varepsilon, 0)$ tende vers zéro ; on pourra utiliser pour cela la question (I, 5).

c) Montrer de même que, si la suite $U(a, 0)$ tendait vers $+\infty$, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que la suite $U(a - \varepsilon, 0)$ tende vers $+\infty$.

d) En déduire $\lambda(a, 0)$. Que vaut $\lambda(x, 0)$ pour $x > a$?

e) Montrer que, pour $y > 0$, la suite $(U_n(a, y))_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

Troisième Partie

Etude de E_0, E_1, $E_{+\infty}$ *(Ces notations sont définies dans le préambule)*

1. Soit x compris au sens large entre 0 et a. Etablir l'existence d'un point unique de E_1 ayant l'abscisse x. On note désormais $\varphi(x)$ l'ordonnée de ce point et Γ la courbe décrite par le point $(x, \varphi(x))$ quand x varie de 0 à a. Déterminer à l'aide de Γ les ensembles E_0, E_1, $E_{+\infty}$.

#M 2.a) Déterminer $\varphi(1)$ et $\varphi(a)$.

b) A l'aide de la relation $U_n(x,y) = U_{n-1}\left(y, \frac{x^2 + y^2}{2}\right)$ établir, pour $x \in [0, a]$, la relation $x^2 + \varphi^2(x) = 2\varphi[\varphi(x)]$

c) Calculer $\varphi(0)$, $\varphi\left(\frac{a}{2}\right)$.

#M 3. Montrer que φ est strictement décroissante.

#M 4. On admet que φ est continue et que Γ a en tout point une tangente.

a) Etudier les variations de $x^2 + \varphi^2(x)$ pour $x \in [0, a]$. En déduire que Γ est située dans une couronne circulaire que l'on précisera.

b) Déterminer $\varphi'(0)$.

c) Que peut-on dire de la tangente à Γ au point $(a, 0)$?

d) Tracer la représentation graphique de φ.

Quatrième Partie

Etude de la rapidité de croissance des suites croissantes de S.

1. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite quelconque appartenant à S.

Démontrer, pour tout $n \geq 0$, les inégalités $\frac{1}{2}U_n^2 \leq U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{2}U_n^2$

2. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite appartenant à S et tendant vers $+\infty$.

On pose $V_n = \frac{U_n}{2}$ et $z_n = 2^{-n} \ln(V_n)$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Etablir que la suite (z_n) tend vers une limite L (on se servira de la série de terme général $z_{n+1} - z_n$). Cette limite dépend de U_0 et U_1 ; on ne cherchera pas à l'évaluer.

b) Les hypothèses restant les mêmes, établir la double inégalité

$$L - \frac{1}{2^n V_n} < z_n < L \qquad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

En déduire un équivalent de U_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on posera $e^L = M$). Que peut-on dire de la différence entre U_n et cet équivalent ?

3. On prend $U_0 = 2$, $U_1 = 2$. Déduire de ce qui précède une valeur approchée de L à 10^{-6} près. Quel est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de U_{20} ?

#M *** FIN *** (P')

#M différences avec le sujet M.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail